幾何學一代宗師陳省身

丘成桐

本文翻譯自丘成桐教授 2020 年 3 月 13 日於哈佛大學講稿 Shiing-Shen Chern as A Great Geometer of 20th Century。2020 年 5 月 3 日刊登於《數理人文》雜誌（訂閱號：math_hmat），譯者：夏木青，香港專業數學科普譯者。未經許可，不得轉載。

序（(2020 年 4 月 30 日)）

余少習籌學，於今五十七年。幼受先君教誨，于中國學者暨古希臘哲人之說，皆有涉獵。然而局促香江一隅，所聞淺陋，未得學問精髓也。

一九六九年余方弱冠，蒙師長提攜，遠渡重洋，受業於柏城陳先生，始知學海無涯，樂何如之，河伯見北海而興歎，仲尼聞韶樂而忘味，于我心有戚戚焉。余竊不自揆，五十年努力，師友切磋，略有小成，庶幾無愧當初立雪之素願。

從心之年，重讀先生遺作，感慨系之。高山仰止，景行行止。余畢業既久，二十載而後，始知當年先生創業之恢宏氣概，不愧為廿世紀中國最偉大之科學家。方其巴黎訪卡當，普城探威爾，拓魏爾之規範場理論，創纖維叢之陳示性類，幾何得其大觀，現代物理奠其根基矣。七十年代高能物理之標準理論，實源自諸物理學大師對規範場理論量子化之重整，吾師居功至偉。至於陳-西蒙斯理論，延續陳類，已成現代凝聚態物理不可或缺之工具矣。

吾師生前，固知其學必傳，其名必顯，功垂萬世，故囑余秉春秋之筆，正本源、辟異說，剖析其一生於籌學之貢獻。

先師仙逝十六年，成桐始敢動筆，誠惶誠恐，草成此文，謹以此告慰先生在天之靈。

1. 緒言

牛頓曾說：

> 我能夠比前人看得更遠，皆因我站在巨人的肩膀上。

陳省身先生是二十世紀幾何學的巨人，後世幾何學者站在他肩膀上的多不勝數。另一方面，他也站在幾位前輩的肩膀上。據先生自己的回憶，對他影響至深者有布拉施克、凱勒、卡當、威爾。前三位教導他投影幾何、積分幾何、凱勒幾何、卡當-凱勒系統、連絡理論、舒伯特算法。威爾是他友人，建議他尋找高斯-博內定理的內蘊證明，以及研究示性類。

讓我們先看看十九世紀有那些數學巨人，他們的思想啟發了陳先生和其他二十世紀的大幾何學家。

微分不變量的研究可以追溯到黎曼、克里斯托弗爾、里奇、利維-奇維塔和魏爾。卡當-凱勒理論對陳先生差不多所有工作都有直接的影響，著名的例子包括高斯-博內公式、陳形式的建構、陳-博特型式、陳-摩瑟不變量、陳-西蒙斯不變量等。積分幾何、線複體和格拉斯曼幾何在陳類的建構中也發揮了重要的作用。陳類的引進，是為了了解向量叢分類空間的上同調。追源溯始，是以必須先回顧陳先生之前大師們的工作。

2. 十九世紀幾何三大方向

十九世紀的幾何學有三大方向：

A. 黎曼的內蘊幾何學，
B. 線性子空間族的幾何，
C. 幾何中的對稱。

A. 黎曼的內蘊幾何學. 牛頓為了研究力學發明了微積分，尤拉隨即把微積分應用於幾何。尤拉僅僅考慮歐幾里德空間裏的曲面。他的看法和牛頓相似，認為整個宇宙是靜止不動的，能夠依靠一個單一的、整體的笛卡兒坐標系統來描述。這種看法給黎曼徹底顛覆了。他的老師高斯有關曲率是內蘊的發現，深深地影響著黎曼的宇宙觀。黎曼工作的目標有三，即

- 建構和坐標系統選取無關的空間，
- 利用這內蘊空間的尺度和拓撲來探討物理學的基礎，
- 結合幾何和拓撲以獲取空間的整體訊息。

黎曼的目光遠大，期望透過幾何來認識物理世界。他的宏圖立足於等價原理，即基本的物理學定律和幾何定理必須和坐標系統的選取 (即觀測者) 無關。無論用笛卡兒坐標或極坐標進行計算，對象的種種幾何屬性皆不會改變。

六十年後，在愛因斯坦創造的廣義相對論中，同樣的等價原理也用上了。黎曼偉大的工作包含在題為《幾何學的基本假設》1854 年的論文之中。幾何必須遵守等價原理這一強烈的信念，驅使黎曼考慮在坐標變換下，兩個微分二次形等價的條件。黎曼因此引進了曲率張量，這結果發表在一篇競逐獎項的文章之中。當時巴黎學院懸賞求解有關熱分佈的問題，但終究沒有人獲獎，黎曼也不例外。論文是在 1861 年七月一日投寄的。在文首他引用了一句拉丁文的格言：此等原理拓展上引之路。他在文中找到了曲率張量，並指出這是兩個微分二次形等價的必要條件。無論張量抑或內蘊的曲率都是全新的概念。黎曼打算循此途徑再往前走，奈何他身染頑疾，健康日差。

1867 年，韋伯 (Martin Weber) 利用狄德金一篇未曾發表的文稿，比較詳細地說明了黎曼的想法。從 1869 到 1870 年期間，克里斯托弗爾 (E.B. Christofell) 和利普希茨 (Rudolf Lipschitz) 對曲率張量進一步探索，並且給出兩個微分二次形等價性的充分條件。1901 年，利維-奇維塔 (T. Levi-Civita) 和里奇 (G. Ricci-Curbastro) 在《絕對微分法及其應用》一文中發表了張量的理論，寫下了里奇曲率張量的公式。

1902 年，貝安奇 (L. Bianchi) 找到了里奇張量的守恆律，他發現只要把里奇張量減去了 $R/2$ 倍的尺度張量，它便滿足一條守恆律。這個稍稍改變的張量於 1915 年十一月由希爾伯特和愛因斯坦在研究廣義相對論時重新發現。廣義相對論公認是人類認識空間與時間的里程碑，幾何學家在其中的貢獻，斷斷不容忽視。

另一方面，黎曼在複分析中引入黎曼曲面，把拓撲學帶進複分析之中。他看出分析學跟黎曼曲面的整體拓撲有著深刻的聯繫。例如，黎曼-羅赫公式便指出，既定極點的半純函數所組成的空間，其維數跟某些曲面上的拓撲性質有關。黎曼還著手研究物體的「把手分解」，可說是龐卡萊有關流形上拓撲和整體分析工作的前導。

在研究的過程中，黎曼曾這樣說：

> 我們小心奕奕地把拓撲性質和尺度性質分辨開來。對同樣的拓撲結構，可以容許有不同的觀測系統，我們選定了其中最簡單的。在這系統中，空間的所有尺度關係皆可完全決定，而所有有關尺度的定理也可由此推導出來。

黎曼為極小水平的幾何和極大水平的幾何所困擾，對前者的測量會愈來愈不準確，但後者卻不然。

> 當我們把在空間的構造無限擴充，我們便要面對無窮遠和無限大，前者和拓撲有關，後者則由尺度決定。

黎曼在現代幾何學萌芽時的探索，讓我們知道尺度和拓撲相互關係的重要性。二十世紀現代幾何的發展，正正以此為主線。

B. 線性子空間族的幾何**.** 1865 年，普洛格爾 (J. Plüucker) 開始研究線幾何。線幾何的對象是三維投影空間中所有投影直線成組成的空間。他引入了以他命名的坐標。不久之後，格拉斯曼 (H. Grassmann) 更進一步，研究在向量空間中所有既定維數子空間所組成的空間，把普洛格爾的工作推廣了。後人稱這些空間為格拉斯曼流形。對流形上的纖維叢來說，格拉斯曼流形是萬有空間。格拉斯曼流形的整體拓撲在微分拓撲學中十分重要。

1879 年，舒伯特 (H. Schubert) 對格拉斯曼空間引進了一種胞腔的結構，用以給出由線性空間組成的格拉斯曼流形的基本同調結構。這些結構的相交給出同調上的乘積結構。外向代數這一重要概念，是格拉斯曼 1844 年引進的。然而，外向代數並沒有引起人們的關注，直至龐卡萊 (1854-1912) 和卡當 (Élie Cartan 1869-1951) 引入微分形式及其上的外微分運算法。

1928 年，卡當指出微分形式應當和流形的拓撲有關，他猜測由微分形式定義的上同調，透過在奇異鏈上對微分形式積分，同構於流形的奇異上同調。1931 年，他的學生德拉姆 (G. de Rham) 在學位論文中證明了這猜想。在三十年代，霍奇 (W.V.D. Hodge) 找到了在形式上的星運算，並且用它來定義德拉姆理論中的對偶。霍奇又用星運算把魏爾 (Hermann Weyl 1885-1955) 關於黎曼曲面的結果推廣到高維流形上去。他又發現了代數流形中上同調的 (p, q) 分解，並且提出著名的猜想，即代數圓環唯一地表示流形的 (p, p) 類。這可說是當前代數幾何中最重要的懸而未決的問題。

C. 幾何中的對稱**.** 受到阿貝爾和伽羅華有關群論、以及李 (Sophus Lie) 在切觸變換的工作的影響，李、克萊因 (Felix Klein) 和基靈 (W. Killing) 發展了李群的理論。1872 年，克萊因提出了著名的愛爾蘭根綱領，根據整體對稱的連續群來刻劃各類不同的幾何，其中包括了投影幾何、仿射幾何和莫比烏斯幾何。

投影幾何是幾何中最古老同時也是影響最為深遠的一分枝。投影群很大，能把「無窮遠點」變換到有限點上。投影幾何研究的正是在這投影群下不變的屬性，其中包括了線性子空間的屬從關係，還有投影變換逞現的對偶性等等。這些概念最終形成了現代拓撲、幾何、代數幾何的基礎。投影幾何的重要人物包括：三世紀阿歷山大的巴巴斯 (Papas of Alexandria)、德薩格 (G. Desargues)、帕斯卡 (B. Pascal)、 熱爾貢 (J.D. Gergonne)、 龐塞萊特 (J.V. Poncelet)、 莫比烏斯 (A.F. Möbius) 、施泰納 (J. Steiner) 。

投影幾何循著兩個不同的方向發展。一個是由阿貝爾、黎曼、麥斯-諾特 (M. Noether) 等人發展出來、有關代數曲線的理論，它的內容很很豐富，古典投影幾何和不變量理論大量地應用於其中。意大利的代數幾何學者包括法諾 (G. Fano)、恩里克斯 (F. Enriques)、塞格雷 (B. Segre)、塞韋里 (F. Severi) 等，他們把代數曲線的理論推廣到代數曲面和某些特殊的高維代數簇上去。另一個方向，投影微分幾何學糅合了兩種不同的觀點，一是黎曼幾何中尋找局部不變量，另一是愛爾蘭根綱領中利用對稱群來刻劃幾何，其中著名學者包括：維爾琴斯基 (E.J. Wilczynski) 、切赫 (E. Čech) 、布拉施克 (W. Blaschke 1885-1962) 。二十世紀初，不少日本和中國幾何學者從事投影微分幾何的研究，如蘇步青 (1902-2003) 和陳先生等便是。

莫比烏斯幾何又名共形幾何，它研究的是在共形群下不變的性質，是李球面幾何的特殊情況。二維的共形幾何內容豐富，導至共形群離散子群和高維共形平坦流形的研究。柳維爾和龐卡萊研究了尺度共形變換的方程，使新的尺度具有常數的純量曲率。魏爾從曲率張量中分離出和共形變換密切相關的部分，後人稱之為魏爾張量。四維流形中的魏爾張量又可進一步分解成自對偶和反自對偶兩部分。

仿射幾何研究的是線性空間內超曲面在仿射映照下的微分不變量。富比尼 (G. Fubini)、布拉施克、卡拉比 (E. Calabi) 都曾研究過這門學問。仿射變換群的不變量在求解蒙日-安培方程中扮演了重要的角色。(凸) 仿射球面的分類很重要，它引出不同類型的橢圓蒙日-安培方程。相關的還有所謂仿射極小曲面的概念，陳先生提出了一個相關的伯恩斯坦問題，問題由汪徐家和特魯丁格 (N.S. Trudinger) 於 2005 年解決了。

3. 三江匯注的現代幾何

魏爾 (H.Weyl 1885-1955) 和威爾 (A. Weil 1906-1998) 同是二十世紀數學上的巨人。威爾曾說：幾何直覺從心理學的角度看，可能永遠也弄不清楚。.... 但我們確確切切地知道的，是這世紀的數學如果沒有卡當、霍普夫、陳省身等人的努力，將不會有如斯長足的進步。可以放心地斷言，數學要一如既往地前展，這樣的大師必不可少。

除了上述三位幾何大師，我們也應該一提利維-奇維塔、魏爾、威爾、惠特尼、摩爾斯、霍奇等人的重要貢獻。利維-奇維塔首次把平行移動引入黎曼幾何之中。平行移動的重要性是不言而喻的，透過它我們可以把在流形不同點上的資訊，沿著連接這兩點的路徑上傳送。資訊因所選路徑的不同而發生變化，恰恰和規範變換相似。一、二年間，魏爾提出他的規範場論，用以了解加上了電磁學的重力理論。理論中的規範群是所有正數形成的乘法群，而且他也用上了尺度的共形變換。在這個早期的理論中，由於平行移動不能保持長度，愛因斯坦並沒有接受它。

1928 年，看到福克 (V. Fock) 和倫敦 (F. London) 在量子力學的工作後，魏爾終於知道正確的規範群是由單位複數所組成的群。他指出規範原理之於物質的定律，猶如等價原理之於重力的定律。在廣義相對論中，最自然最簡單的作用原理是希爾伯特作用量，即純量曲率的積分。在規範原理中的對應者是魏爾作用量，即曲率張量平方的積分。

上世紀初期，卡當把李群和微分系統的不變量理論結合，發展了廣義空間的概念，這些空間包括了克萊因的齊次空間和黎曼的局部幾何。用現代的數學語言描述，他引進了主纖維叢和在纖維叢上的連絡，這便是所謂非可換的規範場論，是利維-奇維塔平行理論的推廣。一般而言，給出一個纖維叢 $\pi\colon E \to M$，其纖維 $\pi^{-1}(x)$, $x \in M$, 為一齊次空間，上面有一李群 G 在作用。一個連絡乃指在纖維間的和群 G 作用相容的無窮小移動。

格拉斯曼引進了外形式，而卡當和龐卡萊則引進了外微分運算。卡當利用普法夫系統和延伸理論找到一些不變量，用以解決幾何中的等價問題。他尋找不變量時依賴移動標架，對陳先生有很大的影響。

霍普夫 (Heinz Hopf 1894-1971) 和龐卡萊證明了在流形上向量場指數的總和能夠用來計算流形的尤拉數，這個結果開啟了微分拓撲的大門。霍普夫於 1925 年的學位論文中，證明在超曲面上的高斯-博內公式。1932 年，他

強調對某些黎曼曲率項組成的多項式進行積分的重要性。1935 年，霍普夫的學生斯蒂芬 (E. Stiefel) 把上述的工作由單個向量場推廣至有限個向量場，然後在切叢上定義了斯蒂芬–惠特尼類。差不多同時，惠特尼 (H. Whitney 1907-1989) 對一般的球面叢定義了相同的示性類。

霍普夫的工作深深地影響了陳先生。先生說：黎曼幾何學及其在微分幾何的推廣，本質上都是局部的。我們需要把鄰近的小塊編織起來，以形成一個整體的空間，看來有點兒彆扭，這便是靠拓撲學完成的。卡當和陳先生都看到了纖維叢在微分幾何的重要性。1934 年，卡當一位名叫埃雷斯曼 (C. Ehresmann) 的學生寫了一篇有關複格拉斯曼流形的胞腔結構的論文，證明了它的上同調不含撓量。這份論文對陳先生其後關於陳類的工作有頗大的影響。埃雷斯曼更進一步把源自卡當的連絡概念現代化。

4. 戰火中的探索

先生 1911 年十月廿八日生於嘉興，2004 年十二月三日在天津去世。他幼年在家讀書，接著上了四年中學，十五歲進入南開大學，及後在清華大學四年 (1930-1934)。大學期間，他研讀了柯立茲 (Coolidge) 的非歐幾何學《圓和球面的幾何》、薩門 (Salmon) 的《圓錐切面和三維解析幾何》、卡斯德爾諾沃 (Castelnuovo) 的《解析和投影幾何》和奧托斯坦迪 (Otto Stande) 的《線構造法》等書。他的老師孫光遠研究投影微何幾何，走的是維爾琴斯基、富比尼、切赫的路子。他的碩士論文是有關投影線幾何的，研究的對像是在在三維線空間中的超曲面。他考慮了線的全等、線生成的二維子流形和二次線複體的振動，最終完成了四篇論文。

1932 年，布拉施克訪問北京，並以「微分幾何中的拓撲問題」為題講學，內容涉及微分同胚的擬群及其局部不變量。陳先生由是對整體的微分幾何學略有所聞，並意識到代數拓撲的重要性。他開始閱讀韋布倫的《相位學》一書。

當時清華大學數學系的系主任是鄭之蕃，後來他成了陳先生的岳父。在他的幫忙下，1934 年陳先生得到獎學金，往漢堡跟隨布拉施克去了。他的博士論文在布拉施克的指導下完成，那是有關蹼幾何的。當時阿丁 (E. Artin)、赫克 (E. Hecke)、凱勒 (E. Kälher) 都在漢堡。布拉施克正在研究蹼幾何和積分幾何。陳先生研讀了塞弗特-瑟雷弗爾和阿歷山大卓羅夫-霍普夫的著作，又開始研究積分幾何。這門學問始自克羅夫頓 (M. Crofton)，他透過一根針

和一平面曲線相交的測度，給出了曲線長度的公式。這個領域的另一開拓者是雷登 (J. Radon)，他引進了以他命名的變換，即利用移動平面的截面來決定物體的形狀，這變換現在廣泛地用於醫療造像之中。陳先生十分喜愛積分幾何學，也許是由於創派的雷登 1919-1922 在新建的漢堡大學當教授，由是影響了布拉施克和他的弟子。陳先生和聖塔洛 (L. Santaló) 都是布拉施克差不多同時期的學生。聖塔洛是繼布拉施克後積分幾何的旗手。從 1939 年開始，陳先生以積分幾何為主題寫了好幾篇文章。

當時凱勒在漢堡以微分系統理論為題講授卡當-凱勒理論。1933 年，他發表了有關凱勒幾何的第一篇論文。在這篇出色的文章中，他引進了不少重要的概念。他算出凱勒尺度的里奇張量是體積形式取對數後的複赫斯算子。他觀察到凱勒-愛因斯坦尺度必須滿足一條複的蒙日-安培方程，並舉出不少例子。他也證明了凱勒幾何中的里奇形式是封閉的。而且，作為德拉姆同調類的一員，它和凱勒尺度的選取無關。這便是凱勒流形上的第一陳類。陳先生當時正在上凱勒的課，他受到這論文的影響是不言而喻的。在他生命的最後三十年中，陳先生常對學生說，他非常希望教懂他們卡當的移動標架法，它的威力非常強大。很可能他是從凱勒那裏學懂卡當–凱勒的，那是 1934 年在漢堡凱勒的班上，能堅持到最後一課的，只有陳先生一人而已。

陳先生畢業後，拿到了一份博士後獎學金，讓他可以留在歐洲深造。布拉施克提議他或是留在漢堡跟隨阿丁做研究，或是到巴黎去向卡當問學。他選擇了後者。從 1936 至 37 年，陳先生到了巴黎，追隨卡當研習移動標架法(用現代語言來說，主纖維叢)、等價問題和更深入的卡當-凱勒理論。他在巴黎逗留了十個月，每兩星期和卡當見一次面。1937 年夏天，他就回中國去了。其後數年，他仔細地閱續卡當的文章。卡當一生的論文六千多頁，他看了最少百分之七八十，其中有部分反覆讀了多遍。抗戰期間，能把全副精力貫注在這些論文上，並且獨立地思考，可說是不幸中之大幸。

陳省身如此回憶卡當對他的影響：

- 毫無疑問，卡當是當世最偉大的一位數學家，他天才橫溢，但為人謙厚，一生平和。
- 1940 年，我刻苦攻讀他的文章，終於領悟到連絡的關鍵作用，並由此完成了幾篇論文，討論如何在幾何結構上定義連絡。

大數學家魏爾曾跟隨希爾伯特學習，他這樣評價卡當：卡當無疑是現存最偉大的微分幾何學家，但我也不得不承認他的著作，跟他大部分論文一樣，皆晦澀難明。1901 年前後，卡當首先把許多局部的幾何問題，理解成普法夫問題的推廣。簡單而言，普法夫問題是如何去刻劃給定切觸 1-形式的拉格朗日子流形。卡當提出在流形上考慮非單一個 1-形式而是一組 1-形式，從而尋求條件決定流形的最大子流形，使得所有這些 1-形式在其上的拉回為零。他找到了一些充分條件，但要構造這個最大的子流形，卻不得不引用柯西-柯瓦列夫斯基定理來求解一系列初值問題，是以他的理論只在實解析的範疇裏成立。當時人們對這樣的限制並不在意。

用現代的語言來說，卡當利用由這些 1-形式生成的微分理想所組成的代數來描述他的充分條件。這樣的結果已涵蓋了他心中差不多所有的應用。1933 年，凱勒發現卡當這套理論可以很自然地推廣至由任意次數形式 (不必是 1-形式) 所生成的微分理想上去，卡當的「自反檢測法」依然成立，這便是今天的卡當-凱勒定理了。

卡當-凱勒理論中的手法對陳先生的影響至鉅。他在證明高斯-博內定理和建構示性類中顯示的高超技巧，在我認識的幾何學家中無人能及。非交換規範場的理論即在向量叢或主叢上的連絡，它的歷史也值得一提。二十世紀之初，卡當看到利維-奇維塔和舒頓的工作能夠推廣到許多具有幾何結構流形上，使人們可以對各式各樣的張量場進行「協變微分」。他發表了有關「擬群」的一系列著名論文。利用獨創的等價方法，他找到一般的方案，用以計算曲率不變量和在今天稱為主叢上的典型平行移動。

上世紀二十年代初期，卡當經已在論文中檢視了在具有幾何結構的流形上的內蘊「連絡」，這些幾何結構包括 (擬) 黎曼、共形、投影等，此外，還有些他稱作「廣義空間」的東西。在 1926 年出版有關黎曼幾何的著作中，卡當討論了張量場的協變微分。

陳先生 1946 年發表陳形式理論，當時他早已熟知在纖維叢上的酉連絡。五十年代，埃雷斯曼和陳先生都曾以一般纖維叢上的連絡為題寫過紹介性的文章。1950 年陳先生在哈佛舉行的世界數學家大會中發表主題演說，題目便是連絡。在演說中，他用現代的語言，回顧了卡當和他在向量叢上連絡和示性類的工作。事實上，陳先生在 1948 年底離開了中國，49 年初到達普林斯頓。他在高等研究所的韋布倫研討班上給出一系列報告。報告的內容要到了 1951 年先生搬到芝加哥後才成書面世，書名《微分幾何學選講》。

陳先生在書中講述連絡的理論。今天，物理學者把這套東西稱作非交換規範場論，魏爾在 1928 年開拓了可換規範場的研究，規範原則的名字是他起的，藉以解釋物質背後的基本定律。在他的名著《群論和量子力學》中，他觀察到電磁學方程和相對性薛定諤方程在規範變換下不變。這裏的規範群乃是圓群，倫敦早已指出魏爾 1918 年用的群和在量子力學中的波函數並不相容。魏爾說這個「規範不變原理」和他前次提出的差不多。他原先的想法，是希望利用這理論來統一引力和電力。他說：現在我相信規範不變性並非把電力和重力聯繫起來，聯繫的應是電力和物質。這個新的規範不變原理具有和廣義相對論相似的特質，它裏面包含著一個任意的函數，只有這樣理論才行得通。魏爾又說：假如我們是對的話，那麼電磁場乃是由物質波場而非重力場所導致。1918 年，他提出作用量是曲率平方的積分。(當時他提出把尺度進行共形變換，其中的共形因子和規範群有關。) 事實上，在規範場論中，最簡單的規範不變純量便是曲率平方的積分。

1954 年，楊振寧和米爾斯 (R. Mills) 用這套理論來說明在粒子物理學中的同位旋量。可是他們不曉得如何去量子化這理論，正如泡利 (W. Pauli) 指出，他們無法用這個理論來提供規範場的非零質量。泡利把魏爾的可換規範場論發展不可換。很明顯，無論泡利、楊或米爾斯都不知道卡當和陳先生等人的工作。有趣的是，無論楊先在在芝加哥留學，或是在普林斯頓當博士後時，陳先生都在那裏。楊父還教過陳先生呢。

5. 不變量的冠冕

我們現在較詳細地說明先生在幾何上的工作。工作大致可分為四時期：

第一時期 由 1932 至 1943，清華大學、漢堡、巴黎、昆明，

第二時期 由 1944 至 1946，普林斯頓、南京、普林斯頓，

第三時期 由 1950 至 1960，芝加哥，

第四時期 由 1960 至 2004，柏克萊和南開。

這些工作大部分和等價問題有關。等價問題可以追溯至黎曼。

問題 **1.** 判定兩個尺度是否可以通過坐標變換互換。

1869 年，克里斯托弗爾和利普希茨解決了黎曼幾何等價問題的一個特殊形式。為此，克里斯托弗爾引進了今天稱作利維-奇維塔連給的協變微分法則。

卡當提出了更廣泛的等價問題：

問題 **2.** 給出兩組線性微分形式 θ^i 和 θ^{*j} (各自的坐標為 x^k 和 x^{*l})，每組的微分形式皆線性獨立。給出一個 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ 的子群 G，試找出下列函數

$$x^{*l}=x^{*l}(x^1,\ldots,x^n) \tag{1}$$

使在它的代換下，θ^{*j} 和 θ^i 只差 G 中的一個元素。

問題的答案通常涉及局部不變量，卡當給出了生成這些不變量的方案。

在第一時期，陳先生沿著卡當的路子走下去，應用卡當-凱勒理論解決了幾個和等價問題相關的問題。例如，在投影幾何中，他聚焦於下列問題：

問題 **3.** 給出一個子流形，試確定其上所有關於投影群不變的局部不變量，並且透過和簡單幾何物體的密切性質來描述它們。

除此之外，先生也研究了蹼幾何、投影線幾何、在投影空間中子流形接觸對的不變量、曲面的變換 (和孤立子理論中的巴克倫 (Bäcklund) 變換有關)。投影微分幾何另一個典型問題，乃是利用正規投影連絡來研究路徑的幾何。李的弟子特雷斯 (A. Tresse) 考慮由

$$y''=F(x,y,y') \tag{2}$$

的積分曲線定義的路徑空間，研究了它在正規投影連絡下的性價。陳先生把他的結果推廣到 n 維空間。給出 $2(n-1)$ 維滿足一微分系統的曲線族，使通過每一點及一切方向，只有一條曲線。他定義了一個正規投影連絡。其後他還把結果推廣到子流形上去。

1939 年，陳先生完成了他人生中第一項主要工作，那是有關積分幾何的。積分幾何的開山祖師是克羅夫頓和布拉施克。陳先生看出來，這套理論最合理的提法應是同一李群的兩個齊次空間，此時有兩個子群 H 和 K，

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ G/H & & G/K. \end{tikzcd}$$

兩個陪集 aH 和 bK 稱為相從，如果它們在 G 中相交。在齊次空間 G/H 上的幾何量可以拉回 G 上去，這個拉回的量經過某些 G 的不變量的作用後，又向前推，成為 G/K 上的幾何量。這項工作比以傑爾芬德 (I.M. Gelfand)

為首的蘇聯學派和向井茂 (S. Mukai) 的工作都要早。今天，這種變換有時稱為傅里葉-向井變換。如此這般，陳先生把克羅夫頓找到的好幾條重要公式都推廣了。幾年之後，也是在這個架構上，他把龐卡萊、聖塔洛、布拉施克的動力學公式也推廣了。威爾指出，布拉施克的工作把積分幾何的層次提高了，但陳的工作又一下子更上一層樓。陳先生的論文既深且廣，閃鑠著思想的光芒，教人難忘。

第二時期。1943 年，陳先生接受了韋布倫 (O. Veblen) 和魏爾的邀請到普林斯頓訪問。當時正值二次大戰，他乘坐的軍機從昆明出發，途經印度、非洲、南美，最後抵達邁亞密，總共花了七天時間。那年八月，他坐火車到了普林斯頓。那時他家剛生了一個男孩，六年後父子才能再見面。

陳先生雖然敬佩魏爾，但卻聽從威爾的建議，研究卡當和惠特尼的纖維叢理論。威爾把 1937 年托德 (J.A. Todd) 和 1943 年艾格爾 (M. Eger) 的論文推介給陳先生。這兩篇論文定義了代數幾何中的「典型類」，和斯蒂芬-惠特尼類只能模 2 的情況不同。不過，這些工作依循意大利幾何學派的精神，建基於一些沒有證明的假設上。到了四十年代末，霍奇證明了托德和艾格爾的類等同於陳類。

陳先生多次告訴別人，他最出色的工作是高斯–博內公式的內蘊證明。所謂內蘊證明，意指證明不需要用到黎曼流形安放在歐氏空間這事實。這公式現在通稱為陳-高斯-博內公式，它的背景可簡述如下：

- 1827 年，高斯在《曲線曲面論》中對測地線三角形給出了公式。他考慮在三維空間裏的曲面，證明用上了高斯映照。
- 1848 年，博內 (P.O. Bonnet) 把公式推廣到由一閉曲線圍成的單連通區域，見《一般曲面理論》。
- 1888 年，范戴克 (W. von Dyck) 把公式推廣至具任何虧格的曲面上去，見《位相分析》。
- 霍普夫再把它推廣到高維空間的超曲面。
- 1940 年，阿倫多弗 (C.B. Allendoerfer) 和芬切爾 (W. Fenchel) 研究了能嵌入歐氏空間中的閉定向黎曼流形。
- 1943 年，阿倫多弗和威爾把公式推廣至閉的黎曼多面體，因而對一般的閉黎曼流形一也成立，見《黎曼多面體的高斯-博內定理》一文。

然而，阿倫多弗-威爾的證明依賴於流形能等距地嵌入歐氏空間的假設。這假設要在十五年後，才由納殊 (J. Nash) 證明。

威爾在陳先生的選集中如此評論：

- 我們依照魏爾和其他人的做法，在公式的證明中利用了管道。當時並不清晰的理解到管道的構造依賴球面叢，而球面叢依賴浸入的相交叢，因此不是內蘊的。
- 陳的證明第一次利用了單位長度的切纖維叢這內蘊的幾何對像，整條公式一下子就清楚不過了。

陳先生的證明，可從下面二維的特例中窺見一二。首先，利用移動標架把曲面的結構方程表示為

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega_1 &= \omega_{12} \wedge \omega_2 \\ \mathrm{d}\omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_{12} \\ \mathrm{d}\omega_{12} &= -K\omega_1 \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

其中 ω_{12} 是連絡形式，而 K 是高斯曲率。連絡形式這時變成曲率形式的超度，只在單位切叢上定義。它的高維推廣是陳先生給出的，由連絡和曲率等項乘積組合而成，頗為繁複。

給出一整體定義的向量場 V。在 V 非零處，令

$$e_1 = \frac{V}{\|V\|}$$

並取 e_1 與 e_2 形成直交系。引用司托克斯公式，可知

$$-\int_M K\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_i \int_{\partial B(x_i)} \omega_{12} \tag{3}$$

其中是以 $B(x_i)$ 為中心的細小圓盤，而向量場 V 在 x_i 為零。式子中右手面的每一項皆可以利用向量場 V 在 x_i 點的指標來計算。根據霍普夫和龐卡萊的相關定理，向量場指標和等於曲面的尤拉數。就算是在簡單的二維情況，陳先生的證明也是新的。在高維空間，利用的是單位長度切向量形成的纖維叢。

曲率形式 Ω_{ij} 是反對稱的。普法夫形式是

$$\mathrm{Pf} = \sum \varepsilon_{i_1,\ldots,i_{2n}} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2n-1} i_{2n}}.$$

一般的高斯-博內公式可以表達為

$$(-1)^n \frac{1}{2^{2n}\pi^n n!} \int_M \mathrm{Pf} = \chi_{\mathrm{top}}(M).$$

陳先生苦心孤詣的一步，是找到在單位球面叢上一個自然的形式 Π，使其微分 $d\Pi$ 等於 Pf 的提升。這個美妙的構造名為超度，它在後來纖維叢的拓撲理論中佔著重要的地位。當應用到龐特利雅金形式時，便得到陳-西蒙斯形式，這已是陳先生和西蒙斯 (J. Simons) 二十多年後的工作了。

第二時期可說是先生數學事業的黃金時期，繼內蘊證明後他又發現了陳 (示性) 類。陳類是向量叢的拓撲不變量。在陳省身選集的序言中，威爾說陳先生初到普林斯頓時，他倆對卡當的工作，以及凱勒在《微分方程系統理論導引》書中的精彩描述印象深刻。兩人意識到纖維叢在幾何中將會扮演重要的角色。

威爾似乎不知道陳先生也受到龐特利雅金 (L. Pontryagin)1942 年和 1944 年兩篇論文的影響。這兩篇文章在陳先生的論文引言中都已提及。在第二篇論文中，龐特利雅金引進了由曲率定義的封閉形式，同時證明了由這個閉形式定義的德拉姆上同調和流形尺度的選取無關。龐氏僅僅在流形能同構嵌入歐氏空間時證明他的曲率形式是示性類。我想，陳先生當時剛剛給出了高斯-博內公式的內蘊證明，很自然地便希望完成龐氏的未竟之功。可是，實格拉斯曼流形的胞腔結構太複雜了不好計算，先生轉而考慮複的情況，他成功了。

陳先生說，我對示性類的認識始於高斯-博內公式，那是曲面理論中人人皆知的結果。遠早於 1943 年給出高維高斯-博內公式的內蘊證明前，我已經知道古典的高斯-博內公式可以由高斯的絕妙定理推導出來，那不過是把正交標架法用到曲面上的結果。這證明的代數內容，可說是以後稱為超度的第一個例子。超度一如所料，成為纖維叢的同調論和其他問題的基本工具。

陳先生心中常惦記著卡當的標架叢和德拉姆定理。纖維叢的發展，我們扼要地概括一下。1936 年斯蒂芬和 1937 年惠特尼引入斯蒂芬-惠特尼類，它只是模 2 的。1939 年費爾德包 (J. Feldbau)、1941、42、43 年埃雷斯曼、1944、

45 年陳、1944 年斯騰羅德 (N. Steenrod) 皆研究了纖維叢的拓撲。1942 年，龐特利雅金引進了龐特利雅金類，利用黎曼流形的曲率給出拓撲不變量。

在證明高斯-博內公式時，陳先生借助了一個向量場，藉著其零點來決定流形的尤拉數。假如我們把一個向量場換成在一般位置的 k 個向量場，它們線性獨立，形成 $k-1$ 維的圓環，這時圓環的同調類跟向量場的選取無關，這是斯蒂芬 1936 年的學位論文的內容。陳先生對複向量叢考慮相似的步驟，在高斯–博內中他利用曲率形式來表示尤拉數。很自然地，對其他陳類也可以利用 k 個向量場的退化集。1937 年，惠特尼考慮比切叢更一般的球面叢上的截面，從障礙理論的角度研究它。他看到在格拉斯曼流形 $\mathrm{Gr}(q,N)$ 上的萬有纖維叢的重要性。此處 $\mathrm{Gr}(q,N)$ 包含所有在 N 維歐氏空間的 q 維平面。他證明了任何一個在形流 M 上其格等於 q 的纖維叢，都可以由一個從 M 到 $\mathrm{Gr}(q,N)$ 的映照 f 誘導出來。當 N 足夠大時，龐持利雅金 (1942) 和斯騰羅德 (1944) 觀察到這個映照在同倫的意義下是唯一的。纖維叢的示性類等於

$$f^*\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{Gr}(q,N)) \subset \mathrm{H}^\bullet(M).$$

1936 年埃雷斯曼研究了上同調 $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{Gr}(q,N))$，知道它們是由舒伯特胞腔生成的。

上世紀九十年代，陳先生回憶他的工作，說：那不過是個簡單的觀察，加上一點兒運氣。1944 年，我看到對複向量叢來說，情況遠比實的情況簡單，因為絕大部分古典的複空間，如古典複的格拉斯曼流形、複斯蒂芬流形等，都沒有撓量。陳先生用了三種不同的方法對複向量叢來定義陳類，即障礙理論、舒伯特胞腔和在叢上連絡的曲率形式。他建立了三者的等價性。

雖然陳類比高斯-博內的影響要大得多，陳先生還是認為後者是他最好的工作。高斯-博內公式刻在南開大學他的墓碑上。我相信先生從高斯-博內公式那兒得到啟發，從而創造了陳類。而且，從這個證明中，他認識到單位切向量構成的內蘊球面叢上的形式在幾何的重要性。這個利用障礙理論的做法，平行於斯蒂芬把霍普夫的向量場推廣到斯蒂芬-惠特尼類，其中把它們視為多個線性獨立向量場存在的障礙。對曲率形式而言，利用它們來表示陳類明顯地相類於高斯-博內公式。陳先生建立了對酉連絡的陳類。威爾在布巴基研討班上作報告時，他把結果重新整理，使它能應用到緊李群的連絡上去。

根據先生的夫子自道，他知道對一般 G-連絡上的公式。可是他不懂得證明上同調類是和連絡的選取無關。這教人有點兒驚訝，威爾不過簡單地把兩

個連絡用一族連絡連起來，然後微分其特徵形式，便得到對應的超度形式。類似的想法早在 1933 年便給凱勒用來證明由里奇曲率形式表達的第一陳類是和凱勒尺度無關的。龐特利雅金也曾把類似想法用於龐特利雅金類。

1945 年，陳先生受邀在美國數學會夏季會議上發表主題演說，他的報告見於次年的數學會會刊第五十二卷，題目為《整體微分幾何學的一些新看法》。霍普夫在這論文的評論中指出，陳氏的工作為整體微分幾何學開展闢了新的天地。1946 年四月，陳先生回國，在南京出任中央研究院數學研究所的副所長。在這時期，並加上他以清華大學教員身分在昆明西南聯大教書的日子，他培養了不了對中國數學界頗有影響的學者，其中著者包括王憲鍾 (1918-1978)、陳國才 (1923-1987)、吳文俊 (1919-2017)。雖然他們都不是陳先生的博士生，但他們都受曾受過先生的栽培。

當希斯布魯克 (F. Hirzebruch) 着手撰寫論文《移植某些代數曲面上的定理到二複數維的複流形》時，他留意到文中某些結果可以推廣到高維，可是所謂對偶性公式尚未證明。這公式斷言兩個複的向量叢的直和的總陳類，等於這兩個叢的總陳類之積。希斯布魯克在校對論文時，附上一個注記：承陳和小平告知，對偶性公式於將出版的陳的論文《關於複球面叢和代數簇的示性類》中得到證明。到了晚年，希斯布魯克回顧這段日子，說：在高等研究所的兩年對我的數學生涯影響至鉅，我研讀陳類，並探究其基本性質，又引入陳格。其後陳格 (Chern character) 在我和阿蒂雅 (M. Atiyah) 的合作中，成為從 K-論到有理上同調的一個函子。

小平邦彥和希斯布魯克的工作拉開了現代代數幾何學的帷幕，其中陳類成了不可或缺的概念。我想陳師看到他的論文發表不出十年竟有此成就，也會覺得驚訝。據先生所言，1948 年威爾曾跟別人包括楊振寧說，陳類將在物理系統的量子化中發揮作用，陳先生或許覺得這是開玩笑，然而其後的發展卻印證了此言不虛，事實上陳類的作用比想像中的還要大。第二陳類也是如此，陳-西蒙斯不變量正在理論物理如異常性中廣泛使用。

論文《埃爾米特流形的示性類》是在 1946 年發表的，此文為複流形上的埃爾米特幾何奠定了基石，埃爾米特連絡面世了。令 Ω 為一向量叢的曲率形式，以下式來定義

$$\det\left(\mathrm{I}+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega t\right)=\mathbf{1}+c_1(\Omega)t+\cdots+c_q(\Omega)t^q$$

利用微分形式定義陳類有其長處，這樣的做法無論在幾何或現代物理都極其重要。

舉例而言，陳先生創造了超度這概念。令 ω 為定義在一向量叢的標架叢上的連絡形式，則其曲率形式由公式 $\Omega = \mathrm{d}\omega - \omega\wedge\omega$ 給出，我們有

$$c_1(\Omega) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{Tr}(\Omega) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\mathrm{d}(\mathrm{Tr}(\omega)).$$

類似地，我們有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\Omega\wedge\Omega) &= \mathrm{d}\left(\mathrm{Tr}(\omega\wedge\omega) + \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\omega\wedge\omega\wedge\omega)\right)\\ &= \mathrm{d}(CS(\omega)).\end{aligned}$$

這裏的 $CS(\omega)$ 稱為陳-西蒙斯形式，它在三維流形、異常消除、弦論和凝聚態物理中當擔當著重要的角色。

在形式的層次進行超度，便得到了在同調上的第二層運算如梅西 (Massey) 乘積，這些概念在陳國才有關逐次積分的工作中出現。當流形是複流形時，我們把 d 寫作 $\partial+\bar\partial$ 。在一篇和博特 (R. Bott) 合作的經典論文中，他們發現，對每一個 i，都有一個自然構造的 $(i-1,i-1)$ 形式 $\tilde{T}c_i(\Omega)$，使得 $c_i(\Omega) = \partial\bar\partial(\tilde{T}c_i(\Omega))$ 。

陳先生利用這個定理，把奈望林納 (Nevanlinna) 的值分佈理論推廣到高維複流形的全純函數上去。形式 $\tilde{T}c_i(\Omega)$ 在阿列克洛夫 (Arakelov) 理論也起著根本的作用。唐納森 (S. Donaldson) 利用 $i=2$ 的情況證明了在代數曲面上關於埃爾米特楊-米爾斯方程的唐納森-烏倫貝克-丘定理。當 $i=1$ 時，第一陳類由下面公式給出

$$c_1 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log\det(h_{i\bar{j}})$$

其中 $h_{i\bar{j}}$ 是埃爾米特尺度，公式的右面是尺度的里奇張量。

第一陳類表達式簡潔明白，導致了卡拉比猜想。複幾何的簡潔和美麗，實在難以用筆墨形容。1946 年有關陳類的文章發表後，陳先生深入地研究了示性類的乘法結構。

1950 年，陳先生到了芝加哥大學，他和斯潘尼爾（E. Spanier）合作，完成了一篇有關球面纖維叢的同調論的文章。在文章中，他們證明了湯姆同構定理，這定理非常有用。（湯姆也在同一年，獨立地證明了這定理。）的。1953 年，在《複球面叢和代數簇上的示性類》一文中，先生說明了考慮一個

以旗流形為纖維的相關纖維叢，示性類可以用線叢來定義。作為推論，一個代數流形的示性類的對偶同調類中，必有一個代數圓環作為代表。此文給出 K-論中的分裂原理，而在和湯姆同構定理結合後，正如格羅騰迪後來指出一樣，可以用來定義在相關叢上的陳類。霍奇考究了如何用代數圓環來表示同調類。他利用了陳先生上述的定理，但只能在流形是在投影空間中非奇異超曲面的完全交集時證明了這是可能的。

陳先生的定理是第一個、同時也是最一般的「霍奇猜想」。它也是首次把全純的 K-論和代數圓環連繫起來。陳先生創造幾何不變量的功力深厚，世人無出其右，從他在投影幾何、仿射幾何、以及擬凸區域上的陳-摩不變量的工作中昭昭可見。他和列文 (H. Levine)、尼倫伯格 (L. Nirenberg) 曾經定義在複流形上同調群的內蘊範數，至今尚未為人深究。陳先生在去世前還有一個主要計劃，即研究更一般的幾何中的卡當-凱勒系統。

另一方面，他在利赫那洛維茨 (A. Lichnerowicz) 的著作《連絡的整體理論和和樂群》的書評中，指出透過卡當的經典工作，可知利維-奇維塔和舒頓在連絡上的成就，背後的指導思想正是群的概念。他又指出一般人把卡當的定義混淆了。卡當的「切空間」即今天的纖維，而他的標架空間即今天的主纖維叢。在同一書評中，陳先生說，和樂群是連絡理論中很自然的概念。但事實並不如他所料，貝格和辛格其後發現，除齊次空間外，它並不是一個很好用不變量。多年之後，辛格 (I. Singer) 告訴我，他在芝加哥當研究生時上過陳先生的幾何課, 他把筆記本給當時在 MIT 的安布羅斯 (W. Ambrose)。稍後，他們證明了今天以他們命名的定理，把和樂群的李代數和曲率張量連繫起來。法國的貝格更進一步，把在黎曼幾何中有可能作為和樂群的李群都作了分類，其後西蒙斯給出了一個更概念化的證明。

和樂群是卡當 1926 年引入的，它和流形的內在對稱有關，也給今天物理學中的超對稱賦予幾何意義。凱勒流形的和樂群是酉群，卡拉比-丘流形的和樂群是特殊酉群。和陳先生的期望相反，現代幾何中最引人入勝的流形，它們的和樂群都很特殊。這些流形的構造依賴於非線性分析，這不是陳先生熟悉的領域。

值得留意的是，自從小平邦彥 (K. Kodaira) 的工作之後，陳先生在芝加哥開了一門課凱勒流形的霍奇理論，課中利用了位勢理論作工具。可是，到了六十年代末期，陳先生寫了本名為《沒有勢位論的複分析》的小書。當時小平邦彥開創使用代數幾何上的消亡定理為工具，並證明了著名的小平嵌入

定理。不知怎的，先生對凱勒幾何的興趣就漸漸淡下來了。五十年代末期，先生對極小曲面這個古老課題發生興趣。卡拉比有關高維球面上最小二維球的整體理論甫面世，他即時被吸引了。

1960 年，先生從芝加哥遷往加州的柏克萊。1967 年，他和奧瑟曼 (R. Osserman) 觀察到，高維歐氏空間中的極小曲面，其高斯映照可視為從曲面到二維平面的格拉斯曼流形上的映照，此時它是反全純的。因此人們可以把全純曲線的理論用到極小曲面上去，從而給伯恩斯坦和奧瑟曼的工作給出新證明。(二維平面組成的格拉斯曼流形具有自然的複結構。) 由此得到啟發，他發表了好幾篇文章，部分是和學生伍夫森 ()J. Wolfson) 合作的，討論從二維球面到格拉斯曼流形的調和映照。那時這類想法頗為流行，烏倫貝克 (K. Uhlenbeck)、伯斯塔爾 (F. Burstall)、伍德 (J. Wood) 等人皆有相關著作發表。在這項工作的同時，他也對凱勒流形間的全純映照發生興趣。他推廣了阿爾福斯有關施瓦茲引理的結果到高維複流形。他也意識到負的曲率導致全純映照的有界性，這點早已由阿爾福斯看出了。這觀察引出了以後小林昭七 (S. Kobayashi) 在雙曲流形上的工作和格拉菲思 (P. Griffiths) 的工作。陳先生在柏克萊極小曲面的講座，影響了西蒙斯在高維極小子簇上的工作。這項重要的工作使人們了解極小錐面的穩定性，對解決伯恩斯坦問題很有幫助。伯恩斯坦問題是了解極小子簇奇異點的關鍵。

陳先生最後的重要工作完成於上世紀七十年代，首先是和西蒙斯合作，引入了陳-西蒙斯不變量，其次是與摩瑟 (J. Moser) 合作研究強擬凸區域，創造了今天稱作陳-摩瑟的不變量。第一項工作受到高斯-博內定理證明中的超度想法啟發，陳-西蒙斯不變量已成為理論物理和凝聚態物理的基石。陳-摩瑟不變量則繼承卡當未竟之功，找到了在雙全純映射下區域的局部不變量。

過去四十年間，陳-西蒙斯形式在理論物理愈見其重要性。其中的發展可略述如下：

1. 1978 年，Albert Schwarz 提出了一套包含了陳-西蒙斯理論的拓撲量子場論。他的論文題為《退化二次泛函的分割函數和雷-辛格不變量》，數學物理通訊 2，247-252。
2. 1981 年，Jackiw 和學生 Templeton 研究了帶有陳–西蒙斯項的三維 QED；1982 年，又研究了非可換規範場論和三維的愛因斯坦重力。

3. 1981 年，Laughlin 發表了二維的量子化霍爾傳導性的論文，次年又發表了分數的量子霍爾效應的論文，其中的低能量可以用陳-西蒙斯項來描述。隨後的工作者有 Wilczek, Zee, Polyakov 等人。
4. 威騰把三維的陳-西蒙斯發展成和瓊斯多項式有關的一套量子理論。威騰的文章激起了對繩結理論的一輪探索，包括對三維雙曲流形的所謂「體積猜想」。陳-西蒙斯理論及其在凝聚態物理上的推廣內容龐大，難以在此綜述。

這兩件重要工作完成後，陳先生依然活躍。他在蹼幾何、映入複格拉斯曼流形的調和映照、李球面幾何等題目上也發表了文章。然而和他早期的不朽工作相比較，這些文章顯然是遜色了，這也難怪，畢竟先生年事已高，精力衰減是自然的。

6. 小結

當我還是學生時，陳師曾對我說，他喜歡數學皆因數學有趣，並且是他擅長的東西。從高斯-博內定理的證明可見，他能從容不迫地處理極度繁複的計算。雖然陳先生對現代幾何的貢獻至鉅，但按他本人的說法，他並非如別人所想那樣，對幾何有一全面的看法，並以之為方向。他時常強調良師益友，互相砥礪交流的重要性。

陳先生說：複數在幾何中為何如此重要？對我來說，這是個謎。它整齊有序，無所不包。先生對古代中國數學沒有發現複數引以為憾。他在複幾何中不朽的貢獻，也算是對過去兩千年中國數學家缺失的保償吧。

在生命的最後階段，他曾推介芬士拿幾何。他和包大衛、沈忠民 (Zhongmin Shen) 寫了一本芬士拿幾何的書。由於這門幾何沒有就具體的模型來發揮，整套理論難以深入。例如，在蒂希米勒空間或小林雙曲空間中出現了具體的芬士拿幾何，但他們的理論卻用不上。黎曼在他的論文中，曾考慮過把黎曼尺度中微分的次方由平方換為四次方，以處理非常遙距的空間幾何。四次方尺度生成的幾何會否豐富多彩，我們拭目以待。其中的等價問題，變成了如何找到所有不變量，以決定兩個四次方的微分在變量變換下相同。或許我們可以先考慮兩個二次形式的對稱張量積。

陳先生對黎曼、卡當、魏爾和威爾佩服得五體投地，但不無諷刺地，他並不認為愛因斯坦有何了不起，而且他也對來自理論物理的嶄新想法反應緩慢，對和量子場論沾上邊的幾何興趣不大。黎曼的夢想是了解極小的宇宙，

這要求對量子場論、甚至一種全新的量子幾何有充分的了解。不過話說回來，陳先生也不是一成不變的。當初我跟他談起求解卡拉比猜想時，他唯唯否否，但其後他意識到這猜想可以用來解決他在代數幾何中的某些問題時，他的看法就不同了。自此他感受到非線性分析在幾何的威力。他重新跟中國接觸後，組織了一系列的國際會議，議題便是《微分幾何和微分方程會議》，由此可見他看法的變化。

毫無疑問，作為大數學家的陳省身先生，將會在數學史上流芳百世，世人不會忘記他對纖維叢和示性類的貢獻。2004 年十一月即先生去世前一個月，國際天文學聯盟把一顆小行星命名以誌紀念。這顆位於主要星帶編號 29552 的陳省身星將會在太陽系中運行不息，而先生的思想和教導則流播於數學的天地之間，兩者遙相呼應。

哈佛大學數學科學及應用中心新近開辦了《數理科學文獻》講座，旨在紹介現代數學各分枝之主要發展，使聽眾對數學有一整體的認識。作者給出了這系列講座的第一講，本文即由演講整理而成。陳省身先生是當代幾何學大師，對後世的影響深遠，同時也是作者的論文導師，以此為題開講，可說是最適合的了。（夏木清譯）

後序（2020 年 5 月 5 日）

本文刊登在數理人文網站上後，克峰來函，指出原文幾處錯誤，特此改正。堂弟成炽亦來函，寄來一九九四年夏天我訪問汕頭大學時市委書記許德立在市委迎賓館宴請我之照片，當時我邀請他同行，亦有兩位副市長和汕頭大學幾位教授陪同。在市委會議室聆聽許市委發展潮汕地區之雄圖大計，印象深刻。俟後，許書記拿著一本大紅本子請我題詞。我好奇地翻閱前面名人題詞的內容，很驚訝的發現陳省身老師的墨寶，寫的是：

> 文公居處，成桐故鄉。

文公是唐朝韓愈，他曾經被貶到潮州，在此地著有我在中學時唸過的「祭鱷魚文」。老師到汕頭訪問時，居然還想起我，更加上美言，使我受寵若驚！

在這裏，值得一提的是：在一九七一年在柏克來讀書時。老師剛好六十歲，他剛剛完成一本專著，叫做：Complex Manifolds without Potential Theory。老師叫我到他的辦公室裡，微笑的將這本著作贈送給我，在首頁上已經寫好題辭：

余生六十歲矣，薪傳有人，願共勉之！

我回家後，將這本書給我的同房同學鄭紹遠閱讀？他羨慕之極，認為我會一輩子好好地保管此書。事實上，這本書始終沒有離開過我。

流光逝水，柏城初見，至于今五十年矣。往事猶歷歷在目，哲人已逝，風規猶存，願後生者勉之！

參考文獻

請參見英文原文,下載地址:https://cmsa.fas.harvard.edu/wp-content/uploads/2020/05/2020-04-22-essay-on-Chern-english-v1.pdf