四十周年演講
一個中大數學家的故事

丘成桐教授
香港中文大學

二零零三年九月十九日

我在香港的郊區——元朗和沙田——長大。

那裏沒有電，也沒有自來水。

小時候就在河中洗澡。家中有八兄弟姐妹，食物少得可憐。

五歲時參加某著名公學的入學試，結果沒考上。原因是用了錯誤的記號，如把 57 反寫成 75，69 反寫成 96 等。

我只能上一所小小的鄉村學校。

那裏有很多來自農村的粗野小孩。

受到這些小孩的威嚇，加上老師處理不善，不到半年，我便身患重病。

在家中養病的半年，我思索如何跟同學老師相處。

升上小六時，我已經是一群小孩的首領，帶著他們在街頭亂鬧。

家父是位教授。他教了我不少有關中國文學的東西。

可是，他並不知道我曾曠課好一段日子。

（或者這是因為我在家中循規蹈矩，他教授的詩詞我也能背誦如流。）

逃學的原因是老師不怎樣教學，在學校悶得發慌，不久連上街也覺得無聊了。

當時香港有統一的升中試。我考得並不好，但幸好分數落在分界線上。

政府允許這些落在分界線上的學生申請私立中學，並提供學費。

我進入了培正中學。

9

培正可能是香港最好的中學。

中學生涯的第一年乏善可陳，本人的成績不大好。

但在家裏就不一樣了，學的東西可真不少，中國文學、小說（東西方）、哲學、歷史都有。這都是父親教授，或者是從他跟學生談論時側聽到的。

他們討論時常常談及希臘哲學，雖然我對希臘哲學不大了解，但卻對它留下深刻的印象。

我開始研讀史學名著史記和左傳。對史記尤其著迷。

這不僅是由於其文字優美，還是因為它敘事求真，史觀獨特。

直到現在，我還不時披閱這書。

史學大師駐足高涯，俯視整個歷史，與大科學家的思入風雲，千宇宙之奧秘遙相呼應。

晉・陶淵明

好讀書，不求甚解，

每有會意，便欣然忘食。

不戚戚於貧賤，不汲汲於富貴。

在以後的日子裏，我都以此作為原則，研讀不同的學問。

在父親的循循善導下，我開始建立人生奮鬥的目標。以下的引文很重要：

左傳

叔孫豹論三不朽

太上有立德，其次有立功，其次有立言，
雖久不廢，此之謂不朽。

立德立功立言之道，必以謙讓質樸為主。
「會當凌絕頂，一覽眾山小」，輕妄浮誇之言也。

司馬遷　孔子

天下君王至於賢人，眾矣！

當時則榮，沒則已焉，孔子布衣，

傳十餘世，學者宗之。

父親師生間的對答中，提到了不少哲學史上的要點。

1. 基本原則
   - 物質存在的根本（基本公設等）
   - 一般現象
   - 所有原理的融合（統一場論）
2. 用邏輯推理來認識真理的種種方法。
3. 利用一些通用的原理來調合各種知識，解釋不同的現象。
4. 偉大哲學家不屑沿襲前人的觀點，亦不全以師說為依歸。其思想雖受昔賢沾溉，然主要為原創獨造。

哲學史的目的有三，

一曰求因，哲學思潮其源甚夥，必先上溯以求之。

二曰明變，往昔哲學思想交纏屈結，故董理其脈絡，是為要務。

三曰評論，所有思潮及其流派，皆一一評論，作警策精闢之言。

王國維論做大學問三個過程

晏殊

…昨夜西風凋碧樹，獨上高樓，望盡天涯路。

柳永

…衣帶漸寬終不悔，為伊消得人憔悴。

辛棄疾

…眾裏尋他千百度，驀然回首，
那人卻在，燈火闌珊處。

在培正的第二年，我多言多動，老師要記我小過。她是我的班主任，責任心強，誠然是為我好。當她知道家父是位教授，但卻拿著微薄的薪酬後，大為震動。此後在她悉心栽培下，我在課堂上規矩多了。

就在這年，我們開始學習平面幾何。

同學對抽象思維都不習慣。

由於在家中時常聽父親談論哲學，對利用公理進行推導的做法，我一點也不覺得見外。

學習幾何後，我對父親的講話，又多明白了幾分。

利用簡單的公理，卻能推出美妙的定理，實在令人神往。

對幾何的狂熱，提高了對數學——包括代數——的鑑賞能力。當你喜歡某科目時，所有有關的東西都變得淺易。

我對歷史也甚有興趣。

它培養我對事物要作一整體觀。

事件是如何發生的？

到底是甚麼原故？

將來會如何？

就在這時，父親完成了他的西方哲學史。他跟學生談話，總是說應整體地看歷史。這種觀念深深地影響了我。

這種想法，在往後的日子中，指引我去尋找研究項目。

文心雕龍　諸子

身與時舛，志共道申。

標心於萬古之上，而送懷與千載之下。

十四歲時，父親便去世了。這或許是我一生中最大的打擊。在一段頗長的日子裏，對父親離開了我和家人的事實，我都不能置信。

家中經濟，頓入困境，我們面臨輟學。幸得母親苦心操持，先父舊交弟子的援手，我們才倖免如此。

家中遽變，令我更成熟堅強。困境中人情冷暖，父親生前的教導，竟變得真實起來。

以前誦讀的詩詞古文，有了進一步的體會。

我花了整整半年，研習古典文學和中國歷史，藉此撫平繃緊的心弦。典麗的詩詞教人欣賞自然之美。

我閱讀了大量數學書籍，並考慮書中的難題。當這些難題都解決掉後，我開始創造自己認為有挑戰性的題目。

由個人去創造問題此後變成我研究事業中最關鍵的環節。學校的課本已經不能滿足我了。我跑到圖書館、書店去看書。我花了許多時間打書釘，閱讀那些買不起的書本。

打從十五歲起，我開始替低年級學生當家教，以幫補家計。我找到一些巧妙的方法，使成績低劣的孩子搖身變成優等生，為此我覺得有點飄飄然。

我積累了教導年青人的經驗，同時也體會到教學相長的道理。

我們的數學老師十分好。他教授的東西，比課程要求來得艱深，但我覺得絲毫不費氣力。

然而物理老師不太行，對此不無失望。中學時養成不了物理上的基本直觀，至今於心還有戚戚焉。

國文老師卻是無懈可擊。他是我的父執輩。他教導我們思想要不落俗套。

國文教師說思惟要自出機杼，讀好書之餘，爛書也無妨一讀，以資比較。因此我甚麼書都啃。他這種觀點，就是放諸我日後的科學生涯中，也有其可取之處。

作文堂的一個典型題目：

豬的哲學觀

於是大伙兒興高采烈，自由發揮。

在班裏我並非名列前茅，數學科的等級也不見得最高。但我比同班諸子想得更深，書也讀得更多。

一九六六年我進了中文大學。雖然對歷史抱著濃厚的興趣，我還是選擇了數學作為我的事業。

就在這時，中學時唸的高等數學漸漸消化，開始時還不大懂，但一下子全都懂了。我比班中同輩高出了不少。

崇基學院校歌

南天海嵎，四方人士，同興此學府。
崇奉基督，勵志篤行，修業勤是務。
漫漫長夜，屹立明燈，使命莫辜負。
學成致用，挽救狂瀾，靈光照寰宇。

神州學術，源遠流長，數典不忘祖。
自由民主，嘉誼友邦，協力相互助。
中西結晶，增益文明，聖教宏其緒。
濟濟菁英，天降大任，至善勉同赴。

大學的數學使我大開眼界。由簡單的公設出發就能推導出所有結果，著實另人興奮萬分。當我了解數學是如此建構後，我寫信給教授，表達我的喜悅。這是本人賞析數學之始。

一位剛從柏克萊畢業的博士來了香港，他名叫史提芬沙拉夫（Stephen Salaff）。他對我大為讚賞，我們合寫了一本有關常微分方程的書。

另外一位老師布狄（Brody）來自普林斯頓。他有一套獨特的教學法。他找來一本高深的數學著作，然後要求學生在某章某節中找尋錯誤，並提出改正的方法。

這是讓我們不要盲目依賴書本的良方。同時也訓練了我對書本上定理採取存疑的態度。我有時將某些定理推廣了，在課堂上說出來，他聽了很高興。

這些教導的重要性在於

—— 培養成獨立思考的習慣

—— 在人前表達數學的重要性

這不論對自己或對自己日後的教學都十分要緊。

雖然只讀了三年大學，已經完成了大學的課程。在沙拉夫的幫助下，我進了柏克萊的研究院。

柏克萊的數學系當時在世界數一數二。我八月到校，便認識了陳省身教授，他後來成為我的論文導師。

在香港時我醉心於極度抽象的數學（當然我的分析功夫也很紮實），覺得數學愈廣泛愈好。我打算唸泛函分析，已經學了不少這方面的東西，包括丹福—史華滋有關的巨冊，還有不少有關算子代數的書。

到柏克萊後，認識不少卓越的學者，我的看法改變了。

我如飢似渴地從他們處學習不同的科目。從早上八時到下午五時我都在上課（有時在班上吃午飯）。這些學科包括拓樸、幾何、微分方程、李群、數論、組合學、概率及動力系統。我並非科科都精通，只對某幾門學問格外留神。

學拓樸時，發現跟以前學的完全不同。班上五十人，每個人看來都醒目在行，比我好多了。他們表現出色，說話條理分明。

於是我埋首做好功課，不久之後，我發現自己畢竟也不賴。關鍵是做好所有棘手的題目，並把這些題目想通想透。

我讀了約翰米拿（John Milnor）的一本書，對裏面講到的曲率的概念深深著迷。米拿是位卓越的拓樸學者。

我開始思考與這書有關的問題，並大部分時間呆在圖書館。

當時研究生並沒有辦公室。柏克萊名牌教授不少，然而不久之後，我對他們竟有英雄見慣的感覺。在圖書館裏我讀了不少書藉和期刊。

在柏克萊的第二個學期，我漸漸能證出一些不簡單的定理。這些定理與群論有關。在崇基時，我跟老師聊天時曾談及有關的內容，我現在把它用到幾何上去。教授都為我的進展而驚訝不已，欣慰非常。其中一位教授開始與我合作，寫了兩篇論文。陳省身教授其時正在放年假。當他回來時，對我的表現甚為嘉許。

縱然如此，對這些工作我倒不覺得怎樣。摩里教授（Charles B. Morrey）有關非線性偏微分方程的課，另人難忘。他教授的非線性技巧，當時並不流行。他的書也佶屈聱牙。但我隱隱感覺到他發展的技巧十分深奧，對未來幾何學的發展舉足輕重。我用心地學習這些技巧。雖在盛名之下，聽他課的學生同事都不多。到學期終結時，我竟成為他班上唯一的學生。他索性就在辦公室裏授課了。這科目後來成為我數學生涯的基石。

完成幾篇文章後，陳教授到處說我是何的出色，雖然他對我的工作認識不深。我開始全盤地思考數學，尤其是幾何。我也試圖去研究幾何學的其它問題，可是進度緩慢。

這年夏天老友鄭紹遠從香港來了，我們在校園旁租了一所〝柏文〞，心情更加開朗了。

就在這個夏天，我請求陳教授當我的論文導師，他答應了。約一個月後，他告訴我，我在一年級時的文章，已夠格作為畢業論文。我有點悶納，心想這些工作還不夠好，而且我還希望多學點東西。

就這樣，在第二個學年中我學了不少複幾何及拓樸。陳師對我期望甚殷，他提議考慮黎曼猜想。十分遺憾的是，到目前為止，我還沒有想過它。

代而之者，我嘗試去了解空間的曲率。我確認卡拉比（E. Calabi）在五十年代作出的某建議，會是理解這概念的關鍵。當時我不認為卡拉比是對的。我開始對此深思苦想。這並不是個當代幾何學者研究的標準課題，明顯地，這是分析學上的一道難題，沒有人願意跟它沾上邊。

我漸漸養成把分析作為工具引進幾何中的志趣。在此之前，曾有人把非線性理論用於三維空間的曲面上。但我考慮的，卻是任意維數的抽象空間。

由於摩里教授及陳師對極小曲面的興趣，我亦對這項目深深著迷。對調和映照尤其情有獨鍾，並因此鑽研了變分法。

我對幾何中的所有分析內容都感興趣。簡而言之，就是要把非線性微分方程和幾何融匯成一體。要了解非線性方程，就必須先了解線性方程。因此我建立了在流形上調和函數的主要定理。在我的影響下，鄭紹遠研究了有關的特徵值及特徵函數等問題。我們合作寫了幾篇重要文章，到而今還是這項目的基礎。

畢業時我得到幾份聘書。陳師提議我到高等研究所，那兒的薪水不及哈佛提供的一半。但我還是到那兒去了。在高等研究所我認識了其它科目出色的數學家。同時提升了對拓樸，尤其是空間對稱理論的鑑賞力。事實上，利用分析的想法（在流形上的群作用），我解決了這科目的一些重要課題。

由於簽証的問題，我到了紐約石溪分校。當時石溪是尺度幾何的重鎮，事實上那兒真的不錯，聚集了一批朝氣勃勃的幾何學家。我學習他們的技巧，但並不認為那是幾何的正確方向。

一年後我到了史丹福，當時那裏並沒有幾何學者。史丹福環境安寧，非線性偏微分方程很出色。在那裏我碰見好友李安西門及舊弟子孫理察。我們一起拓展了在幾何上的非線性分析。

晉・陶淵明

久在樊籠裏，復得返自然。

我剛到史丹福時，一個幾何大會正在舉行。有位物理學家應邀就廣義相對論發言。

當時我對物理還不算在行。但對他提及有關相對論的一個幾何問題卻一見傾心。賦予空間的數學解釋，與空間物理導出數學問題，兩者皆令人神往。

這問題當時對我而言，還是遙遠不可及。但我對它念念不忘。

在會議期中，我找到了一個辦法，去反證卡拉比的提議。我發表了我的想法，反應似乎不錯，沒人提出異議。人們都鬆了口氣，畢竟大家都猜對了，卡拉比猜想是不對的。

兩個月後，卡拉比教授寫信給我，釐清了我的一些想法。

我在推理中找到一個嚴重的決口。在我的研究生涯中，這可說是最痛苦的經歷了。我輾轉反側，不能成眠。

差不多兩個星期都失眠，眼見名譽因犯錯（雖然我沒把想法成文發表）而毀於一旦。經過反覆仔細審閱每個步驟後，我相信問題反過來才對。為卡拉比猜想舉出反例，其論據是先假設它是對的，然後考慮其後果。數年後，當我解答了這個猜想，很多有關的自然推論就水到渠成了。

意識到卡拉比猜想是對的後，我便朝著正確的方向邁進。在準備最後的證明前，需要大量的準備工作。我和鄭紹遠合作研究蒙奇—安培方程、仿射幾何、極大曲面等相關問題。與孫理察合作搞調和影照，與孫理察和李安西門搞極小曲面。在短短兩年裏，我們於與幾何有關的非線性分析，碩果纍纍。這是幾何學的黃金時代。

屈原

固余心之所善兮，雖九死而猶未悔。

新婚伊始，我找到完成卡拉比猜想的正確想法。我終於掌握了凱勒（Kahler）幾何中的曲率了。

一些老大難的代數幾何問題，都因卡拉比猜想的證明而解決掉。

紐約時報 2003 年 9 月 2 日

宇宙一懸案 眾人答案殊

弦理論中的一個困難在於它要用十維的時空來描述，而我們生存的空間只有四維而已。史創敏格（Strominger）博士回憶起他在找到數學家丘成桐博士的一份論文時的萬分喜悅之情。丘博士現在任教於哈佛大學及香港中文大學。在這篇文章裏他證明了尤金尼奧・卡拉比（Eugenic Calabi）博士提出的猜想。卡拉比博士現已從賓夕凡尼亞大學退休。猜想指出這些額外的維數雖然不可捉摸，但在微觀下可以想像它們卷曲起來，就像地毯的小毛圈。

完成卡拉比猜想的證明後，我看出自己建立了融合兩門重要科目——非線性偏微分方程和幾何——的架構。

一九七六年我在 UCLA 碰見老友麥克斯（Meeks），他是我在研究院時的同學。他的景況不大好。Meeks 是位具原創性的數學家，我向他提議合作，試圖把極小曲面和三維流形的拓樸聯繫起來。

結果成績斐然。我們解決在這兩門科目中的兩個經典難題：

1. 當一塊肥皂膜的邊界是凸時，膜面不能自相交。
2. 史密斯猜想的證明，這是與霍斯頓（Thurston）工作結合的成果。

一旦把方向校正了，很多古典問題便能迎刃而解。

次年，我回到柏克萊訪問，並組織了“幾何上非線性問題”的研討班。孫理察和鄭紹遠都在那兒。和理察一起，我們終於解決了那個使我念念不忘的有關廣義相對論的難題。

這道難題叫做正質量猜想，它在廣義相對論中佔基本的地位。（只有當質量為正時，時空才能穩定。）

一九七八年我又回到史丹福。和蕭蔭棠一起，我們利用極小曲面作為工具，解決了複幾何上有名的法恩科（Frenkel）猜想。我也利用了調和映照作為工具去研究離散的群對稱。這些想法，迄今仍有其價值。

利用我們在廣義相對論的工作，孫理察和我研究了具正純量曲率的流形的結構。

一九七九年我們在高等研究所舉辦微分幾何年。差不多所有幾何學家都來了。我們為幾何學釐定了發展的方向。我提出一百條在幾何裏的有趣問題。到目前為止，有的已經解掉了，但有的還是迄立不動。

七十年代確是幾何學的豐收期。

到了七十年末期，我在數學界可說是家傳戶曉。對於我解決的難題，媒體也有廣泛報導。

然而，認為我的奮鬥目標是獎項，是成名成家，那就不對了。這些都不是本人研究的首要目標。

我對數學的興趣，源於人類智能足以參悟自然的欣喜。從幾何上看，大自然的美是永恒不朽的。

與朋輩如孫理察、西門、鄭紹遠、麥克斯（Meeks）、烏蘭貝克（K. Uhlenbeck）、漢密爾頓（R. Hamilton），和稍後的當勞遜（S. Donaldson）、塔貝斯（H. Taubes）、惠斯根（G. Huisken）等人的共同努力下，幾何上的非線性分析已匯成大流。它於探討自然之美中的作用不容低估。晚近的進展更顯示它在物理及其它應用科學中的重要性。

當幾個重要領域——幾何、非線性分析、代數幾何、數學物理——自然地融合在一起後，經典的老大難題便會迎刃而解。解題可以視為人們理解大自然的路燈柱。

孔子

學而不思則罔，思而不學則殆。

韓愈

譽之則不以為喜，毀之則不以為憂。

C. F. 高斯 (1817)

“竊意以為幾何之本，其真偽實非人類心智所能證明，亦非人類心智所能理解者，余意於此，日久邇堅。此等空間之屬性，莫測高深，後之來者，或有灼見，得窺堂奧。惟今之世，吾輩宜視幾何學與純先驗之算術為殊途，宜彼與力學並列也。”

現試舉出一個把幾何概念用於電腦圖像的例子

- 具有這樣複坐標的抽象二維空間稱為黎曼曲面
- 在以下的三圖中，我們利用這些概念在茶壺、兔子或極小曲面的表面繪上標誌。請注意這些標誌可視為經緯線的推廣。它們也是互相垂直的。

高斯曲率在面孔辨認的應用

（圖）

黎曼曲面

- 曲面間的全純映照

(圖)

在過去十年間，我和合作伙伴正在致力研究基本物理在幾何中的作用。為了從物理中掌握動機後面的直觀，我花了不少時間參加物理系辦的研討班。在與物理系的交往中，我們獲得了一些數學上深刻的定理。其中重要的概念是所謂對偶性。

對偶性這概念，優美典雅。它指出在某理論中的強作用等同於另一理論中的弱作用。

這與中國道家或陰陽有不少共通之處。分段但對偶性更嚴格，同時它是定量的。利用它我們可以算出某些數學量。如果用其它方法來進行，那是極度困難的。

為數學而數學，實屬顯然，何須三思。於無用諸物理學之種種數學理論，均需一視同仁，與其它理論無分軒輊。

－ 彭加策

使余復稚年，童蒙初習，則願從柏拉圖之教晦，自數學始。

— 伽里略

我三兄弟都曾經得到中文大學的教育，而先父更在創校之先幫忙大學的建設。我能夠貢獻大學，深以為榮。

在近代史上，香港是一個舉足輕重的城市，香港的出色學者遍佈世界，僅哈佛大學就有四個來自香港的教授，三個都與本校淵源甚深。毫無疑問的。本港在有遠見的政府和賢達的支持下，香港是中國最有能力在中國土地上培養 Nobel 和 Fields medal award 的城市，中文大學在這一點上可說是義不容辭。

香港中文大學數學系舊生會

http://www.math.cuhk.edu.hk/alumni

多謝！